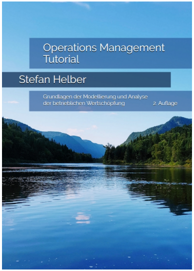
Planung von Transporten und Touren

Das klassische Transportproblem

Prof. Dr. Stefan Helber



Problemstellung

Annahmen und Notation

- Angebotsorte i mit Angebotsmenge a_i
- Nachfrageorte j mit Nachfragemenge n_j
- $(\sum_{i=1}^{I} a_i = \sum_{j=1}^{J} n_j)$
- Transportkostensätze c_{ij} je ME

Transportmengen $X_{ij} \geq 0$ im Kostenminimum?

Beispiel

Daten

- drei Angebotsorte, Angebotsmengen a_i von 40, 50 und 42 ME
- vier Kundenorte, Nachfragemengen n_j von 30, 34, 44 und 24 ME
- Transportkostensätze c_{ij}

Werk i \ Kundenort j	1	2	3	4
1	12	4	12	14
2	8	18	10	6
3	16	16	2	12

Entscheidungsmodell

$$\text{Minimiere } \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} c_{ij} \cdot X_{ij}$$

u.B.d.R.

$$\sum_{j=1}^{J} X_{ij} = a_i, \qquad i = 1, ..., I$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ij} = n_j, \qquad j = 1, ..., J$$

Zulässige Lösung im Beispiel

Werk i \ Kundenort j	1	2	3	4	a_i
1	30	10			40
2		24	26		50
3			18	24	42
n_j	30	34	44	24	

Kosten 1.416 Geldeinheiten

Optimale Lösung im Beispiel

Werk i \ Kundenort j	1	2	3	4	A_i
1	4	34	2		40
2	26			24	50
3			42		42
N_j	30	34	44	24	

Kosten 644 Geldeinheiten

Ausblick

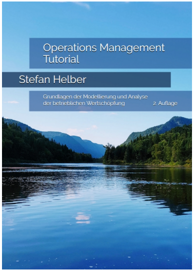
Klassisches Transportproblem

- Kern vieler Modelle zur Transport- und Standortplanung
- zahlreiche Erweitungsmöglichkeiten, z. B. im Umladeproblem
- LP mit spezieller Struktur
- spezialisierte Lösungsverfahren

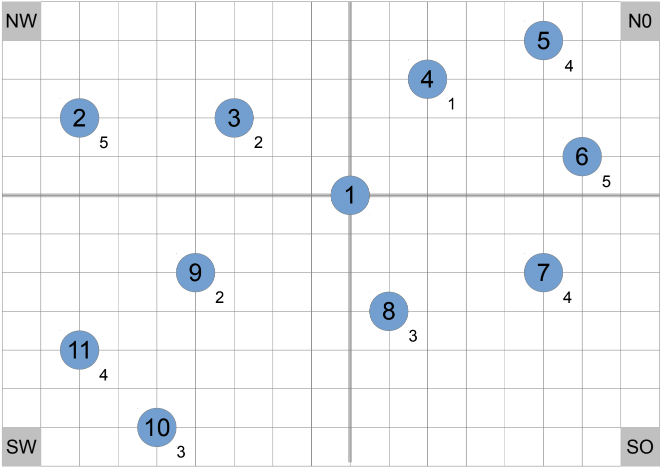
Planung von Transporten und Touren

Das Tourenplanungsproblem

Prof. Dr. Stefan Helber



Beispiel



Fahrzeugkapazität: 8 Ladungseinheiten

Distanzen

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1		9	5	5	9	7	7	4	6	11	11
2	9		4	10	14	14	16	13	7	10	6
3	5	4		6	10	10	12	9	5	10	10
4	5	10	6		4	6	8	7	11	16	16
5	9	14	10	4		4	6	11	15	20	20
6	7	14	10	6	4		4	9	13	18	18
7	7	16	12	8	6	4		5	9	14	14
8	4	13	9	7	11	9	5		6	9	9
9	6	7	5	11	15	13	9	6		5	5
10	11	10	10	16	20	18	14	9	5		4
11	11	6	10	16	20	18	14	9	5	4	

Problemstellung

Annahmen und Notation

- Orte i mit Kapazitätsnachfrage w_i
- Depot am Ort 1
- Distanz c_{ij} zwischen Orten i und j
- Fahrzeugkapazität b
- Touren m

Entscheidungsvariablen:

$X_{ijm} \in \{0, 1\}$	gleich 1, falls in Tour m vom Ort i zum Ort j gefahren wird, sonst 0
$Y_{im} \in \{0, 1\}$	gleich 1, falls Ort i in Tour m enthalten ist, sonst 0
Z_i	reellwertige Hilfsvariable zur Vermeidung von Kurzzyklen

Entscheidungsmodell: Zuordnung und Rundreise

$$\text{Minimiere } ZFW = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} \sum_{m=1}^{M} c_{ij} \cdot X_{ijm}$$

u.B.d.R.

$$\sum_{i=1}^{I} w_i \cdot Y_{im} \leq b, \qquad m = 1, ..., M$$

$$\sum_{j=1}^{I} X_{ijm} = Y_{im}, \qquad i = 1, ..., I; m = 1, ..., M$$

$$\sum_{i=1}^{I} X_{ijm} = Y_{jm}, \qquad j = 1, ..., I; m = 1, ..., M$$

$$\sum_{m=1}^{M} Y_{im} = 1, \qquad i = 2, ..., I$$

$$Z_i - Z_j + I \cdot \sum_{m=1}^{M} X_{ijm} \leq I - 1, \qquad i,j = 2, ..., I; i \neq j$$

$$X_{iim} = 0, \qquad i = 1, ..., I; m = 1, ..., M$$

Vermeidung von Kurzzyklen

$$Z_i - Z_j + I \cdot \sum_{m=1}^{M} X_{ijm} \leq I - 1, \qquad i,j = 2, ..., I;\, i \neq j$$

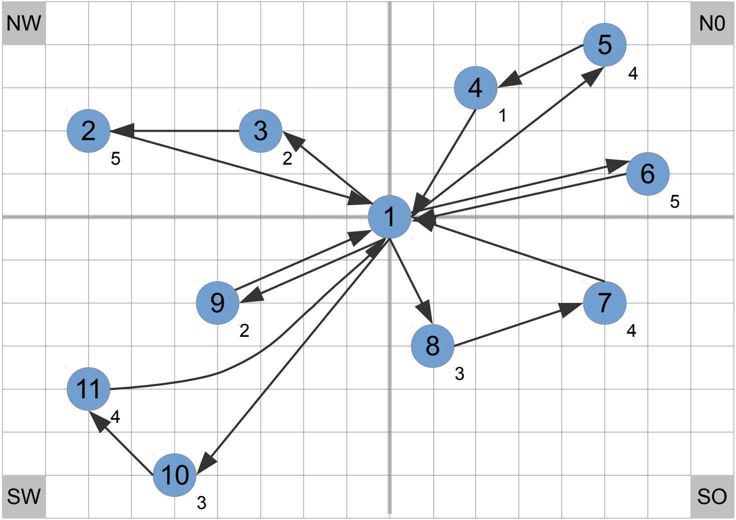
Beispiel eines Kurzzyklus ohne Ort 1: $X_{2,4,7} = X_{4,2,7} = 1$

$$Z_2 - Z_4 + I \leq I - 1$$
$$Z_4 - Z_2 + I \leq I - 1$$

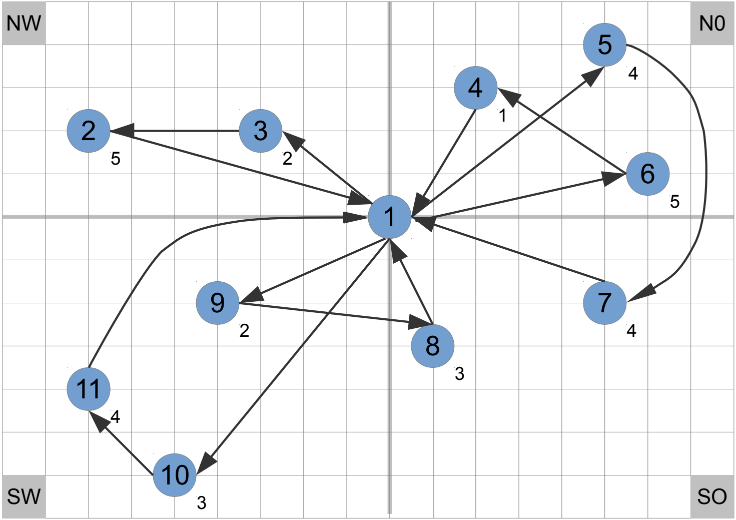
$$Z_2 - Z_4 \leq -1$$
$$Z_4 - Z_2 \leq -1$$

Widerspruch!

Zulässige Lösung



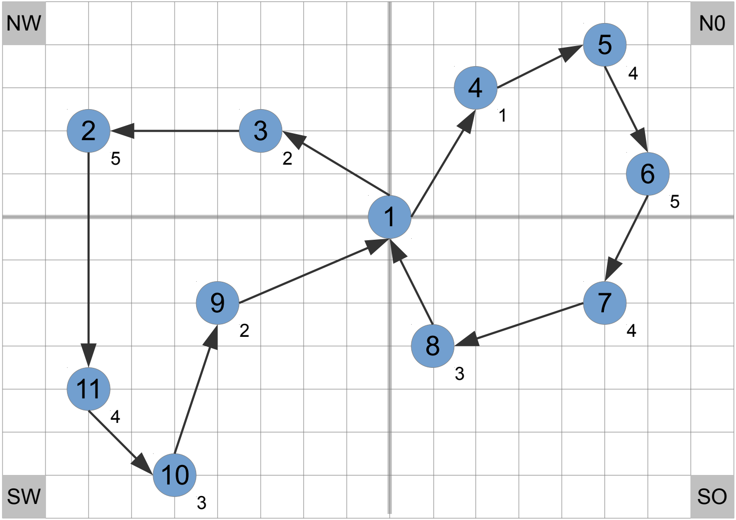
Optimale Lösung



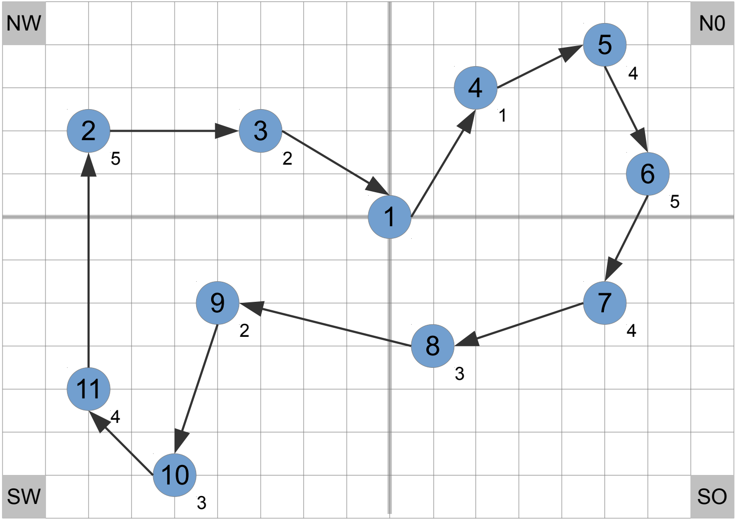
Auswirkung der Fahrzeugkapazität

Fahrzeugkapazität b	Anzahl der Touren	Gesamtstrecke
5	8	126
6	7	120
7	5	102
8	5	100
9	4	86
10	4	80
15	3	70
20	2	56
50	1	52

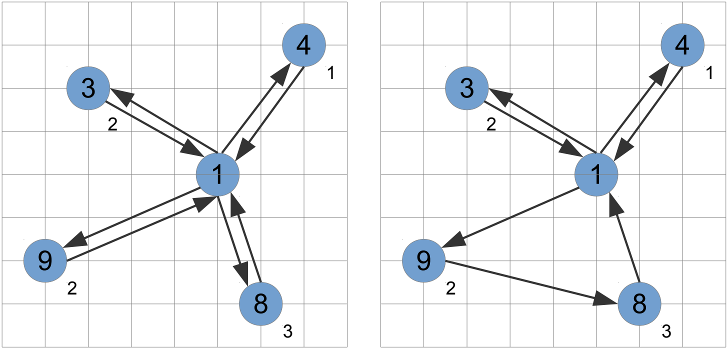
Optimale Lösung bei $b = 20$ ME



Optimale Lösung bei $b = 50$ ME



Savings-Heuristik



Ersparnis s_{ij} beim Zusammenfassen der Pendeltouren

$$s_{ij} = c_{i,1} + c_{1,j} - c_{ij}$$

Ausblick

Tourenplanung

- Offline- vs. Online-Probleme
- Zeitfenster
- Pickup & Delivery